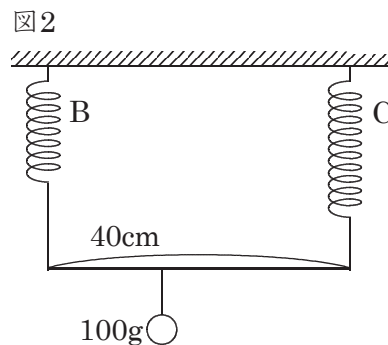
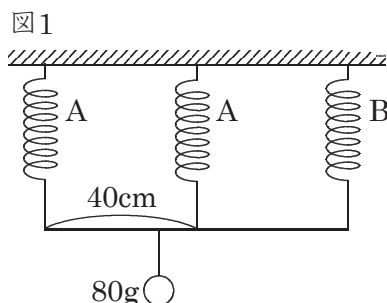


ばねとてこのつりあい

【問題】

次の表のような性質を持つ3種類のばねA～Cと、長さ80cmの棒があります。これについて、あとの問いに答えなさい。ただし、ばねの重さは考えなくてかまいません。

ばね	自然長	10gあたりののび
A	20cm	2cm
B	20cm	3cm
C	30cm	5cm



〔基本的な問題〕……棒の重さを考えない場合

◎ 図1のように、長さ80cmの棒を2本のばねAとばねBを用いてつり下げ、重さ80gのおもりをつるすと棒は水平になってつりあいました。

- (1) 棒が水平になってつりあったとき、ばねBの長さは何cmになりますか。
- (2) 80gのおもりをつるした位置は、棒の左はしから何cmのところですか。

◎ 図2のように、長さ80cmの棒の両はしをばねBとばねCでつり下げ、重さ100gのおもりをつるすと棒は水平になってつりあいました。

- (3) 棒が水平になってつりあったとき、ばねBの長さは何cmになりますか。
- (4) 100gのおもりをつるした位置は、棒の左はしから何cmのところですか。

◎ (1) (2) (3) (4)

〔発展問題〕棒に重さがある場合の問題……難関校を狙う受験生向け

☆ 長さ80cmの棒が重さ40gの均質で一様な棒であるとして、上の(1)～(4)の問いにそれぞれ答えなさい。

☆ (1) (2) (3) (4)

【ヒント】(3)と(4)の考え方

ばね B と C の自然長がちがうので、棒はおもりをつるす前から水平になっていません。これが、この問題を“難しく見せている”点です。逆に言えば、2本のばねを同じ長さにして考えられれば、この問題は簡単に解けるはず。そこで、自然長の短いばね B の長さを、ばね C に合わせて“のばす”ことを考えることから解き進めてみましょう。

【解説】

◎〔基本的な問題〕……棒の重さを考えない場合

(1) 3本のばねの自然長がすべて同じなので、3本のばねののびが等しければ棒は水平になってつりあう。そこで、右のような表を作り、

ばね	自然長	10gあたりののび	6cmのばす力
A	20cm	2cm = ②	30g = ③
B	20cm	3cm = ③	20g = ②

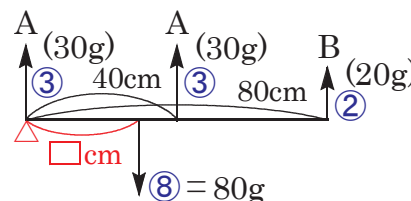
ばねを同じ長さだけのばすために必要な力の大きさの比を求める。

→のびを 6cm (2cm と 3cm の最小公倍数)にそろえると、A : B = ③ : ②となる。

いま、おもりの重さは、③ + ③ + ② = ⑧ となるので、⑧ = 80g より、③ = 30g、

② = 20g となるので、ばね B の全長は、20cm + 3cm × $\frac{20g}{10g}$ = 26cm となる。

(2) 棒にはたらく力をまとめたものが、右の解法図である。棒の左はしを支点として、棒の左はしから 80g のおもりをつるす位置までの距離を cm としたモーメントのつりあいを考えると、



$20g \times 80cm + 30g \times 40cm = 80g \times \text{35cm}$ となる。

【式の解き方】筆算をせずに、等式の性質を用いて暗算を使うと速く求められる。

- ・ $20g \times \frac{80}{40} + 30g \times \frac{40}{40} = 80g \times \text{35cm}$ ……両辺をすべて 40 で割る。
- ・ $20 \times 2 + 30 \times 1 = 80 \times \text{35}$ ……さらに、両辺をすべて 2 で割る。
- ・ $20 + 15 = \text{35cm}$

(3) (1)と同じようにして考える。右のような表を作って、ばねを同じ長さだけのばすために必要な力の大きさの比を求める。

ばね	自然長	10gあたりののび	15cmのばす力
B	20cm	3cm = ③	50g = ⑤
C	30cm	5cm = ⑤	30g = ③

→のびを 15cm (3cm と 5cm の最小公倍数)にそろえると、A : B = ⑤ : ③となる。

※ 解法のポイント

2本のばねの自然長が異なっているときは、先に短い方のばねだけをのばして最初の長さをそろえて考える。

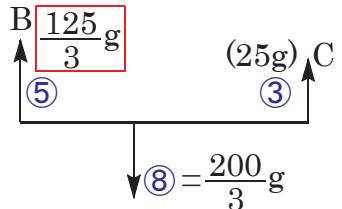
ばね B とばね C の自然長の差は 10cm なので、ばね B だけを 10cm のばすのに必要な力の大きさを、次のようにして求める。

(続く)

$$\begin{array}{ccc} \text{重さ} & \rightarrow & \text{ばね B ののび} \\ \begin{array}{c} 10\text{g} \\ \downarrow \\ \boxed{\frac{100}{3}}\text{g} \end{array} \times \frac{10}{3} & & \begin{array}{c} 3\text{cm} \\ \downarrow \\ 10\text{cm} \end{array} \times \frac{10}{3} \end{array}$$

いま、棒につるした 100g のおもりの重さのうち、 $\frac{100}{3}\text{g}$ だけをばね B を 10cm のばすのに“優先的に”使うと、残る重さは $100\text{g} - \frac{100}{3}\text{g} = \frac{300}{3} - \frac{100}{3}\text{g} = \frac{200}{3}\text{g}$ となる。

そこで右の図のように、この残った重さをばね B と C に
⑤：③で比例配分すれば、ばね B と C にかかる力の大きさを求めることができる。



$$\text{ばね C にかかる力} \cdots \frac{200}{3}\text{g} \times \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{5} + \textcircled{3}} = \frac{200}{8}\text{g} = \underline{25\text{g}}$$

$$\rightarrow \text{ばね C の全長} \cdots 30\text{cm} + 5\text{cm} \times \frac{25\text{g}}{10\text{g}} = \underline{42.5\text{cm}} \quad (\text{ばね B の全長と同じ})$$

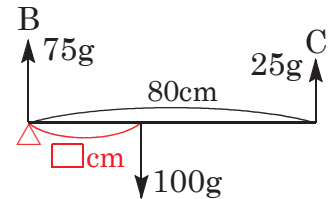
棒が水平になってつりあうときはばね B と C の全長は等しいので、C の全長の全長を求めればばね B の全長を求めたことになる。もちろん、次の計算を行ってばね B の全長を直接求めてもかまわない。

$$\text{ばね B にかかる力} \cdots 100\text{g} - 25\text{g} = 75\text{g} \quad (= \frac{100}{3}\text{g} + \frac{125}{3}\text{g})$$

$$\rightarrow \text{ばね B の全長} \cdots 20\text{cm} + 3\text{cm} \times \frac{75\text{g}}{10\text{g}} = \underline{42.5\text{cm}}$$

(4) 棒にはたらく力をまとめたものが、右の解法図である。

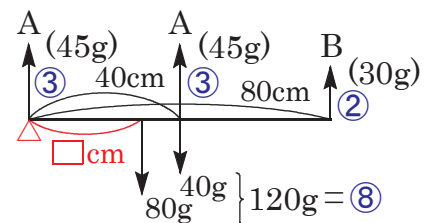
棒の左はしを支点として、棒の左はしから 100g のおもりのつるす位置までの距離を $\square\text{cm}$ としたモーメントのつりあいを考えると、 $25\text{g} \times 80\text{cm} = 100\text{g} \times \underline{20\text{cm}}$ となる。



☆【発展問題】棒に重さがある場合の問題……難関校を狙う受験生向け

(1) 棒に重さがあっても、ばね A と B にかかる力の大きさの比が A : B = ③ : ②となるときに棒が水平になってつりあうことに変わりはない。おもりの重さが 80g、棒の重さが 40g なので、ばね A と B にかかる力の合計は、 $80\text{g} + 40\text{g} = 120\text{g}$ となる。したがって、ばね B にかかる力の大きさは、 $120\text{g} \times \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{8}} = 30\text{g}$ となるので、ばね B の全長は、 $20\text{cm} + 3\text{cm} \times \frac{30\text{g}}{10\text{g}} = \underline{29\text{cm}}$ となる。

(2) 棒にはたらく力をまとめたものが、右の解法図である。棒の左はしを支点として、棒の左はしから 80g のおもりのつるす位置までの距離を $\square\text{cm}$ としたモーメントのつりあいを考えると、



$$30\text{g} \times 80\text{cm} + 45\text{g} \times 40\text{cm} = 40\text{g} \times 40\text{cm} + 80\text{g} \times \underline{32.5\text{cm}} \quad \text{となる。}$$

【式の解き方】筆算をせずに、等式の性質を用いて暗算を使うと速く求められる。

$$\cdot 30\text{g} \times \frac{80\text{cm}}{2} + 45\text{g} \times \frac{40\text{cm}}{1} = 40\text{g} \times \frac{40\text{cm}}{1} + 80\text{g} \times \square\text{cm} \cdots \text{両辺をすべて40で割る。}$$

$$\cdot 30 \times 2 + 45 = 40 + 2 \times \square\text{cm} \rightarrow 60 + 45 = 40 + 2 \times \square\text{cm} \rightarrow 65 = 2 \times \underline{32.5\text{cm}}$$

(3) おもりの重さが 100g, 棒の重さが 40g なので、ばね B と C にかかる力の合計は、
 $100\text{g} + 40\text{g} = 140\text{g}$ となる。また、棒に重さが無いときと同様に“優先的に”短いばね B を 10cm のばすために必要な力は $\frac{100}{3}\text{g}$ なので、残る重さは $140\text{g} - \frac{100}{3}\text{g} = \frac{320}{3}\text{g}$ となる。これを右の図のようにして B と C に⑤ : ③ で比例配分すれば、ばね B と C にかかる力の大きさを求めることができる。

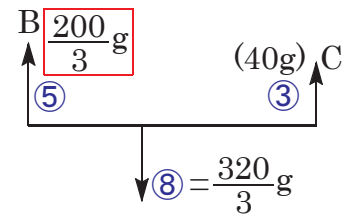
ばね C にかかる力…… $\frac{320}{3}\text{g} \times \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{5} + \textcircled{3}} = \frac{320}{8}\text{g} = 40\text{g}$

→ばね C の全長…… $30\text{cm} + 5\text{cm} \times \frac{40\text{g}}{10\text{g}} = 50\text{cm}$

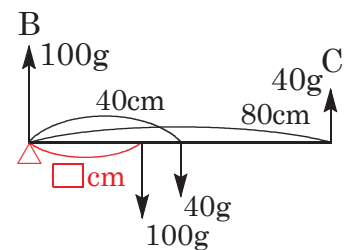
棒が水平になってつりあうときはばね B と C の全長は等しいので、C の全長の全長を求めればばね B の全長を求めたことになる。もちろん、次の計算を行ってばね B の全長を直接求めてもかまわない。

ばね B にかかる力…… $140\text{g} - 40\text{g} = 100\text{g} (= \frac{100}{3}\text{g} + \frac{200}{3}\text{g})$

→ばね B の全長…… $20\text{cm} + 3\text{cm} \times \frac{100\text{g}}{10\text{g}} = 50\text{cm}$



(4) 棒にはたらく力をまとめたものが、右の解法図である。棒の左はしを支点として、棒の左はしから 100g のおもりをつるす位置までの距離を cm としたモーメントのつりあいを考えると、 $40\text{g} \times 80\text{cm} = 40\text{g} \times 40\text{cm} + 100\text{g} \times \text{input cm}$ となる。



【式の解き方】筆算をせずに、等式の性質を用いて暗算を使うと速く求められる。

・ $40\text{g} \times \cancel{80}^4 = 40\text{g} \times \cancel{40}^2 + 100\text{g} \times \text{input cm}$ ……両辺をすべて 20 で割る。

・ $\cancel{40}^8 \times 4 = \cancel{40}^8 \times 2 = \cancel{5}^1 \times \text{input cm}$ ……さらに、両辺をすべて 5 で割る。

・ $32 = 16 + \text{input cm}$

【解答】

◎ (1) 26cm (2) 35cm (3) 42.5cm (4) 20cm

☆ (1) 29cm (2) 32.5cm (3) 50cm (4) 16cm